ZAHLENFOLGEN

Beispielsammlung

Höheres Niveau

für Studenten

Text Nr. 201

Stand: . Juni 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text enthält eine Sammlung zu Zahlenfolgen mit teilweise erhöhten Anforderungen, wie sie im 1. und 2.Semester gestellt werden. Viele sind auch im Gymnasium behandelbar.

Die Sammlung wird weiter ergänzt.

Inhalt

Teil 1:

Konvergieren diese Folgen? Bestimme ggf. ihren Grenzwert.

1 Bruchfolgen (ab Seite 9)

(1) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+4n+1000}$

(2) $a_n = \dfrac{n^3+2n^2+12}{\left(n^2-3\right)(n+3)}$

(3) $a_n = \sin\left(\dfrac{3n-2}{4n+1}\pi\right)$

(4) $a_n = \dfrac{n^3-3n^2+15}{n^2+6n+9} - \dfrac{n^2-2}{n+3}$

(5) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2}\cdot\left(\dfrac{n^3-3n^2+3}{n} - \dfrac{n^2}{2}\right)$

(6) $a_n = \dfrac{[illegible]^8 - 5n^6}{(12n+1)^{[illegible]}\left([illegible]^2-1\right)^3}$

(7) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{(n+1)^2}{n}$

(8) $a_n = \dfrac{n^3(n+2)^2}{4n^5-2n+1}$

(9) $a_n = \dfrac{n^3-2}{n^2+2n}$ und $b_n = \dfrac{n^2-1}{n+3}$ Konvergie[illegible] d[illegible]lge d_n [illegible]

(10) $a_n = \dfrac{2n^3-n^2+5n-1}{n^2-2n+4} - \dfrac{6n^2-4[illegible]}{3n+[illegible]}$

[illegible] W[illegible]zelfolgen (ab Seite 11)

(20) $a_n = \sqrt{n^2+[illegible]}-1$

(21) $a_n = \sqrt{n^2-n}-n$

(22) $a_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - [illegible]$

(23) $a_n = \sqrt{4n^2+6n+1}-n$

(24) $a_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n-1}\right)$

(25) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3(n+1)}-\sqrt{n^3(n-1)}}{n}$

(26) $a_n = \dfrac{\sqrt{[illegible]}-1}{\sqrt{[illegible]}+1}$

(27) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$

(29) $a_n = \dfrac{n^2+\sqrt{5^n}}{3^n+1}$

(30) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

(31) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1,\quad a>0$

(32) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\dfrac{n-1}{n+1}}$

3 Exponentialfolgen (ab Seite 14)

(40) $a_n = \dfrac{1}{3^n - 2^n}$

(41) $a_n = \dfrac{1}{1+3^n-(-3)^n}$

(42) $a_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$

(43) $a_n = \dfrac{n \cdot 3^{n+1} + 5^{-n}}{n^5 \cdot e^n + n \cdot 3^{n-1} + \pi}$

(44) lim sup und lim inf $a_n = \dfrac{2^{-n} + (-1)^n}{1+3^{-n}}$

(45) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - n^2}{2^n + n^2}$

(46) Gegeben ist die Folgenschar $a_{r,n} = (2+3r)^n$

a) Für welche r ist $|a_{r,n}| \leq 2$

b) Für welche r ist die Folge monoton?

c) Für welche t ist die Folge beschränkt?

---

4 Trigonometrische Folgen (ab Seite 17)

(60) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$

(61) $a_n = \left|\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right|$

(62) $a_n = \cos(n\pi)$

(63) $a_n = \cos^n\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(64) $a_n = n \cdot \sin($[illegible]

(65) $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

5 Spezielle Aufgaben *(ab Seite 19)*

(100) Häufungspunkte von $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^{-1+(-1)^n}$

(101) lim sup und lim inf von $a_n = (-1)^n - \frac{n}{n+1}$

(102) Häufungspunkte von $a_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{1}{3}$

(103) Untersuche $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \left(1 + (-1)^n\right)$

(104) Häufungspunkte von $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

(120)! $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$

(121) Beweise: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(121) $a_n = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}$ ist Nullfolge

(123) $a_n = \frac{(2n)! + 2n!}{(2\ldots)\,(n+1)!}$

(140) Konvergiert $a_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$?

(141) Konvergiert $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$?

(160) Untersuche die Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz.

a) $a_n = \frac{\ldots + 6n + 1}{\ldots 2n}$

b) $a_n = \frac{\ldots 3n + 2}{n^2 + 3n}$

c) $a_n = \frac{2n + 1 - (-2)^{-n}}{1 + 2n} - 1$

Teil 2: Konvergenzbeweise mit ε

(ab Seite 28)

(201) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

(202) $a_n = \dfrac{n^2}{\binom{n}{3}}$

(203) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right) = -\frac{1}{2}$

(204) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+2n+5}$

(205) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$

(206) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n} = 0$

(207) $a_n = \sqrt{\left(\dfrac{1+(-1)^2}{3n^2+3}\right)^2 + \left(\dfrac{n-4}{n^2+1}\right)^2}$

(208) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(209) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(210) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+2}-3^n}{4^n+8} = 16$

(211) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{n^2-1}$

Teil 3 (ab Seite 35)

Aufgaben, die auf $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ zurückgehen

(300) e als Grenzwert

a) Monotonie von $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b) Monotonie von $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

c) a_n und b_n bilden eine Intervallschachtelung für den Grenzwert e.

(301) Berechne den Grenzwert von $a_n = \left(5-\dfrac{3^n}{4^n}\right)\cdot\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}$

(302) Berechne den Grenzwert von $a_n = \dfrac{8n^2-5}{2n^2+7n}\cdot\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n+2}$

(303) Berechne den Grenzwert von $a_n = n\cdot\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n$

(304) Berechne den Grenzwert von $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

Teil 4: Rekursive Folgen

(ab Seite 38)

(401) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$

(402) $a_1 = 10$, und $a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1}$ (mit vollst. Induktion)

(403) $a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$

(404) $a_1 = 0$ und $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ (explizit, vollst. Induktion)

(405) $a_0 = 0$; $a_1 = 1$ und $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$ für $n \geq 0$ (Fibonaccifolge)

(406) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$

(407) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n)$ (mit vollst. Induktion)

(408) $a_1 = 20$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 16}$ (mit vollst. Induktion)

(409) $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ (mit vollst. Induktion)

(410) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$ (mit vollst. Induktion)

(411) $a_1 = -1$, $a_2 = -1$ und $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}$ ([illegible]t. Induktion)

(412) $a_1 = \frac{1}{4}$ und $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ (mit vollst. Induktion)

(413) $a_1 > 0$ und $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{1+[illegible]}$

(414) [illegible] $a_{n+1} = \frac{[illegible]^2}{1+[illegible]}$ (mit vollst. Induktion)

(415) $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$

(416) [illegible] $= 1$ und $a_n = \sqrt{[illegible] + a_{n-1}}$

(417) $a_0 =$ [illegible] und $a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$ (Konvergenz nach Cauchy)

(418) Es sei r und $a_0 \notin \left]0 ; \frac{1}{r}\right[$ sowie $a_{n+1} = 2a_n - r \cdot x_n^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Beweise: $a_n \leq \frac{1}{r}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

b) Beweise mit vollständiger Induktion: $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

c) Beweise, dass (a_n) konvergiert und berechne den Grenzwert.

(419) Zeige, dass die Folge a_n mit $a_1 = 1$ und $a_1 = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\sqrt{a_n^2 + 2}$ konvergiert.

Berechne ihren Grenzwert,

Lösungen

Teil 1: Bruchfolgen

(1) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+4n+1000} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{1000}{n^2}} = \frac{1-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+12}{\left(n^2-3\right)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{12}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)\cdot n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{12}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3n-2}{4n+1}\pi\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\pi\right)\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}\pi\right)\right) = \sin\left(\frac{3-0}{4+0}\cdot\pi\right)$$

$$= \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-3n^2+15}{(n+3)^2} - \frac{n^2-2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-3n^2+15}{(n+3)^2} - \frac{(n^2-2)(n+3)}{(n+3)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-3n^2+15}{(n+3)^2} - \frac{n^3+3n^2-2n-6}{(n+3)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^2+2n+21}{(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^2+2n+21}{n^2+6n+9} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-6+\frac{2}{n}+\frac{21}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}} = \frac{-6+0+0}{1+0+0} = -6$$

(5) $$a_n = \frac{1}{n^2+2}\cdot\left(\frac{n^3-3n^2+3}{n} - \frac{n^2}{2}\right) = \frac{1}{n^2+2}\cdot\frac{2n^3-6n^2+6-n^3}{2n} = \frac{n^3-6n^2+6}{2n^3+4n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-6n^2+6}{2n^3+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{6}{n}+\frac{6}{n^3}}{2+\frac{4}{n^2}} = \frac{1-0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

(6) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{144n^8-5n^6}{(12n+1)^2\left(2n^2-1\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{144n^8-5n^6}{n^8}}{\frac{(12n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{(2n^2-1)^3}{n^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{144-\frac{5}{n^2}}{\left(\frac{12n+1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{2n^2-1}{n^2}\right)^3}$$

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{144-\frac{5}{n^2}}{\left(12-\frac{1}{n}\right)^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^3} = \frac{144}{12^2\cdot 2^3} = \frac{1}{8}$$

(7) $$a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n}$$

Die Folge lautet: $a_{n1} = \frac{1}{2}-4 = -\frac{7}{2}$, $a_2 = \frac{4}{3}-\frac{9}{2} = -\frac{19}{6}$, $a_3 = \frac{9}{4}-\frac{16}{3} = \frac{27-64}{12} = -\frac{37}{12}$, …

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-(n+1)^3}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2-3n-1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = -3$$

(8) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+2)^2}{4n^5-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+4n^4+4n^3}{4n^5-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{4-\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}} = \frac{1}{4}$$

(9) Es sei $a_n = \dfrac{n^3 - 2}{n^2 + 2n}$ und $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 3}$. Konvergiert die Folge $d_n = a_n - b_n$?

Lösung:

$$d_n = \frac{n^3 - 2}{n^2 + 2n} - \frac{n^2 - 1}{n + 3} = \frac{\left(n^3 - 2\right)\left(n + 3\right) - \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 2n\right)}{\left(n^2 + 2n\right)\left(n + 3\right)}$$

$$d_n = \frac{n^4 + 3n^3 - 2n - 6 - \left(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n\right)}{n^3 + 5n^2 + 6n} = \frac{n^3 + n^2 - 6}{n^3 + 5n^2 + 6n}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n^2 - 6}{n^3 + 5n^2 + 6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^3}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

(10) $a_n = \dfrac{2n^3 - n^2 + 5n - 1}{n^2 - 2n + 4} - \dfrac{6n^2 - 4}{3n + 1}$

Zuerst Polynomdivision für beide B[illegible]he:

$$\begin{array}{l} (2n^3 - n^2 + 5n - 1) : (n^2 - 2n + 4) = 2n + 3 \\ -(2n^3 - 4n^2 + 8n) \\ \hline 3n^2 - 3n - 1 \\ -(3n^2 - 6n + 12) \\ \hline 3n - 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [illegible]^2 + 0n [illegible] (3n + 1) = 2[illegible]\frac{[illegible]}{3} \\ -(6[illegible] 2n) \\ \hline [illegible] 4 \\ -(-2n [illegible]) \\ \hline -\frac{1[illegible]}{3} \end{array}$$

Also folgt:

$$a_n = 2n + 3 + \frac{[illegible]13}{[illegible] - 2n + 4} - 2n + [illegible] \frac{\frac{10}{3}}{3n + 1}$$

$$a_n = \frac{11}{3} + \frac{3[illegible]3}{n^2 - 2[illegible]} + \frac{[illegible]}{[illegible]+1}$$

$$\lim_{n\to[illegible]} [illegible]\frac{[illegible]}{3}, \text{ denn } [illegible]\left(\frac{3n - [illegible]}{[illegible]^2 - 2n + [illegible]} + \frac{10[illegible]}{[illegible]+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n} - \frac{13}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} + \frac{\frac{10}{3n}}{3 + \frac{1}{n}}\right) = 0$$